UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2007-2**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **24/11/2007**
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

SOLUCIONARIO DE LA
TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 60 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**

ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS

Problema 1
Sea la tabla de valores:

x	0	2	4	6	8
y	0.4	0.48	0.497	0.498	0.5

a) Encuentre un ajuste por mínimos cuadrados de la forma: $e^x(1-a\,y)=b\,y$. ¿Cuáles son los valores óptimos para a y b?
b) Determine el factor de Regresión R^2.
c) A su criterio para ésta data que procedimiento de aproximación sería más adecuado, ¿un ajuste por mínimos cuadrados o una interpolación polinómica de grado 4?

Solución

a) $e^x(1-a\,y)=b\,y$
Agrupando convenientemente:
$e^x = y(ae^x+b)$
$1/y = a+b\,e^{-x}$
$Y = a+bX$
Tabla:

X =e^{-x}	1	0.1353	0.0183	0.0025	0.0003
Y =1/y	2.5	2.0833	2.0121	2.0080	2

Por mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} \sum X^2 & \sum X \\ \sum X & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum XY \\ \sum Y \end{bmatrix}$$

a = 2.0062
b = 0.4952

b) Calculo del factor de Regresión:

x	0	2	4	6	8
y	0.4	0.48	0.497	0.498	0.5
$\hat{y}=1/(a+be^{-x})$	0.3998	0.4824	0.4962	0.4982	0.4984

$$\bar{y}=\frac{\sum y}{n}=0.4750$$

$$R^2=\frac{\sum(\hat{y}-\bar{y})^2}{\sum(y-\bar{y})^2}=0.9942$$

c) El ajuste por mínimos cuadrado para este caso es muy bueno debido al factor de regresión muy cercano a 1, por lo tanto un ajuste casi perfecto.

Problema 2

Considerar la función $T(x)$ definida como sigue:

$$T(x)=\begin{cases} 2x^3+x^2-22x+26 & 0\le x\le 1 \\ 7x^2-28x+28 & 1\le x\le 3 \\ -3x^3+34x^2-109x+271 & 3\le x\le 4 \end{cases}$$

Explicar cuáles propiedades cumple y cuáles no cumple $T(x)$ para ser un Trazador Cúbico natural de la siguiente tabla:

x	0	1	3	4
y	26	7	7	187

Solución

Condiciones frontera

$T_0(x)=2x^3+x^2-22x+26$ $T_0'(x)=6x^2+2x-22$ $T_0''(x)=12x+2$ $T_0''(0)=2$	$T_2(x)=-3x^3+34x^2-109x+271$ $T_2'(x)=-9x^2+68x-109$ $T_2''(x)=-18x+68$ $T_2''(x)=-18(4)+68=4$	No cumple la condición frontera por lo que no es un spline natural ($T''(0)=T''(4)=0$) Condiciones de Continuidad en x=1

$T_0(1) = 7$	$T_1(1) = 7 - 28 + 28 = 7$	Si
$T_0'(1) = 6 + 2 - 22 = -14$	$T_1'(1) = 14 - 28 = -14$	Si
$T_0''(1) = 12 + 2 = 14$	$T_1''(1) = 14$	Si

Condiciones de Continuidad en x=3

$T_1(3) = 7$	$T_2(3) = 7 - 28 + 28 = 7$	Si
$T_1'(3) = 14(3) - 28 = 14$	$T_2'(3) = 14 - 28 = -14$	No
$T_1''(3) = 14$	$T_2''(3) = 14$	Si

Problema 3.

a) Deduzca la siguiente fórmula de diferenciación numérica a partir del polinomio interpolante de Lagrange:

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\right)$$

b) Usando la fórmula anterior evalúe la segunda derivada de $f(x) = x^2 e^x$, en x=1,; con h=0.1, usando la fórmula dada en a) y muestre el error.

Solución:

a) Dados los puntos: $x_0 - h, x_0, x_0 + h$, por Lagrange

$$f(x) \approx \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2h^2} f(x_0-h) - \frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{h^2} f(x_0) + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{2h^2} f(x_0+h)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h^2}\left((2x-2x_0-h)f(x_0-h) - 2(2x-2x_0)f(x_0) + (2x-2x_0+h)f(x_0+h)\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2h^2}\left(2f(x_0-h) - 4f(x_0) + 2f(x_0+h)\right) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right)$$

b) $f(x) = x^2 e^x$

Valor Aproximado

$$f''(1) \approx \frac{1}{0.1^2}\left(f(1-0.1) - 2f(1) + f(1+0.1)\right) = \frac{1}{0.1^2}\left(f(0.9) - 2f(1) + f(1.1)\right) = 19.0756$$

Valor Exacto

$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x$$

$$f''(1) = 19.0280$$

Error

Error= 0.0476

Los Profesores.